МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Московский технологический университет"

МИРЭА

Филиал МИРЭА в г. Фрязино

Кафедра общенаучных дисциплин

ПРИНЯТО
на заседании кафедры ОНД
(протокол №
от «__» __________2016 г.)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_________ (_____________)
«___»_________2016 г.

Т.А. КУЗНЕЦОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические материалы для проведения практических занятий для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств»

Занятие №1

Дифференциальные уравнения 1-го порядка (1).

Необходимые сведения.

1. $F(x, y, y') = 0$ – дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка.

2. Решение ДУ (или интеграл ДУ) – такая функция, явная или неявная, которая обращает ДУ в тождество.

3. График решения ДУ– интегральная кривая.

4.<u>Метод составления ДУ семейства кривых</u> $\Phi(x, y, C) = 0$:
Дифференцируем данное уравнение по переменной x и исключаем параметр C из системы двух уравнений $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) = 0 \end{cases}$

5.<u>Метод разделения переменных.</u>
Если ДУ имеет вид (или может быть приведено к такому виду): $y' = f(x, y)$, где $f(x, y) = p(x) \cdot q(y)$, то оно называется ДУ с разделяющимися переменными.

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = p(x)q(y) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{q(y)} = p(x)dx \\ q(y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \dfrac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx \\ q(y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(y) = P(x) + C \\ q(y) \neq 0 \end{cases}$

Отдельно следует проверить, не является ли интегралом ДУ выражение $q(y) = 0$.
Если ответ положителен, то это выражение следует добавить к полученному решению.

6.<u>Метод нахождения ортогональных траекторий</u> однопараметрического семейства кривых.
Пусть $S_1 : \Phi(x, y, C) = 0$ - однопараметрическое семейство кривых (C – параметр).
Найдём его уравнение методом, изложенным в п.4, и запишем полученное ДУ в виде:
$$y' = f(x.y)$$
Тогда искомое уравнение семейства S_2 (семейства ортогональных траекторий):
$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$
Решая его, находим $S_2 : G(x, y, D) = 0$, D – параметр.
Линии семейства S_2 пересекают линии семейства S_1 под прямым углом.

Задачи для решения в аудитории.

1. Проверить подстановкой, что данная функция $f(x)$ есть решение ДУ:
   а) $f(x) = Cx^3$ ДУ: $xy' = 3y$
   б) $f(x) = x\left(\displaystyle\int_0^x \frac{e^x}{x}dx + C\right)$ ДУ: $xy' - y = xe^x$
   в) $f(x) : 2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$ ДУ: $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$

2. В заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющей приведённому начальному условию и изобразить эту кривую:
   а) $y = Cx^3$, $y(1) = 1$
   б) $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$
   в) $y = Ce^x$, $y(0) = 5$

3. Составить уравнение, которому удовлетворяют все точки экстремума интегральных кривых ДУ $y' = f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

4. Изобразить семейство кривых и составить ДУ семейства :
   а) $x^2 + y^2 = 2Cx$ (окружности)
   б) $y = x^2 + 2Cx$ (параболы)
   в) $y = C \cdot chx$ (цепные линии)

5. Решить ДУ с разделяющимися переменными и изобразить их интегральные кривые:
   $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y' = \dfrac{x}{y}$, $y' = \dfrac{y}{x}$, $y' = y$

6. Найти частные решения ДУ, удовлетворяющие начальным условиям:
   а) $y' = x, y(0) = -\dfrac{1}{2}$, изобразите соответствующую интегральную кривую.
   б) $y' = -\dfrac{y}{x}, y(1) = 1$, изобразите соответствующую интегральную кривую
   в) $(1 + y^2)dx - xydy = 0, y(1) = 0$

7. Найти ортогональные траектории данных семейств кривых:
   а) $y = Cx^3$
   б) $Cy^2 = x^3$
   в) $x^2 - 2y^2 = C^2$

Домашнее задание.

1. Сб. задач под ред. Ефимова, Поспелова, том 2, глава10, стр.276 и далее:

№№ 10.1, 10.4, 10.5, 10.8, 10.10, 10.12, 10.23, 10.25 – 10.31, 10.44, 10.45 , 10.184,10.186

Занятие №2

Дифференциальные уравнения 1-го порядка (2).
Необходимые сведения.

1. **Уравнения с разделяющимися переменными.** Метод разделения переменных:

Если ДУ имеет вид (или может быть приведено к такому виду): $y' = f(x,y)$, где $f(x,y) = p(x)\cdot q(y)$, то оно называется ДУ с разделяющимися переменными.

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = p(x)q(y) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{q(y)} = p(x)dx \\ q(y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \dfrac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx \\ q(y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(y) = P(x) + C \\ q(y) \neq 0 \end{cases}$

Отдельно следует проверить, не является ли интегралом ДУ выражение $q(y) = 0$. Если ответ положителен, то это выражение следует добавить к полученному решению.

2. **Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.**

Уравнения вида $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ при $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ допускают разделение переменных, если произвести линейную замену $z = a_1x + b_1y + c_1$ или $z = a_2x + b_2y + c_2$

3. **Уравнения с однородной правой частью и приводящиеся к ним.**

- Если ДУ имеет вид (или может быть приведено к такому виду): $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то оно называется ДУ с однородной правой частью.

Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой:

$$t = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = tx \quad \Rightarrow \quad dy = tdx + xdt \qquad \text{или} \qquad y' = t'x + t$$

- Уравнение вида $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ сводятся к однородному, если перенести начало координат в точку пересечения прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

т.е. заменой $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, где $M_0(x_0, y_0)$ - точка пересечения прямых.

- Некоторые уравнения вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где P и Q не являются однородными функциями одного порядка сводятся к однородному заменой $y = z^m$.

4. **Линейные ДУ I , уравнения Бернулли и уравнения Риккати.**

- Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x), b(x) \neq 0$ называется линейным уравнением 1-го порядка.

  Структура общего решения такого уравнения: $y_{о.н}(x) = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$,
  где $y_{о.о.}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$,
  а $y_{ч.н.}$ – частное решение данного неоднородного.

  Общее решение однородного легко находится, т.к. переменные разделяются, и оно имеет вид: $y = Ce^{-\int a(x)dx}$. Общее решение неоднородного ищется в виде $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$.

- Уравнение Бернулли – это уравнение вида: $y' + a(x)y = b(x)y^m$

  Оно сводится к линейному заменой: $z = y^{1-m}$.

- Уравнение Риккати – это уравнение вида: $y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$

Оно сводится к уравнению Бернулли заменой $y(x) - y_0(x) = z(x)$, где $y_0(x)$ - какое-то решение уравнения Риккати

5. **Уравнения в полных дифференциалах.**

- Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, заданное в области D, называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists$ такая непрерывная в D функция $u(x.y)$, что левая часть уравнения есть полный дифференциал этой функции (du).Тогда решение $u(x.y) = C = const$.

  Достаточным условием того, что уравнение является ур-нием в полных дифференциалах, служит равенство: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Задачи для решения в аудитории.

1. Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданному начальному условию (НУ):

   1.1. $2y(1+y^2)dx + x(3y^2+y+3)dy = 0$, НУ: $y(1) = 1$

   1.2 $x(1+y)y' = y^2$, НУ: $y(1) = 1$

   1.3 $(y+2)y' = \sin 2x$, НУ: $y(0) = 1$

2. С помощью линейной замены переменных привести уравнение к уравнению с разделяющимися переменными и найти общее решение:

   2.1. $(4 - x - 2y)dx - 2(1 + x + 2y)dy = 0$

3. Найти общее решение уравнений:

   3.1 $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ 3.2 $xdy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx$ 3.3 $(2x - y - 2)dx + (x + y - 4)dy = 0$

   3.4 $(x-1)y' + 3x + 2y + 3 = 0$ 3.5 $\left(3x^2y^2+1\right)y' + 3xy^3 = 0$

4. Найти общее решение линейного ДУ I
   - методом вариации произвольной постоянной (Лагранжа):

     4.1 $x^4y' + 2x^3y = 1$ 4.2 $y' + ytgx = e^x \cos x$
   - не применяя метод Лагранжа (с помощью искусственного приёма):

     4.3 $x^2y' + xy + 1 = 0$

5. Найти ортогональные траектории семейства кривых $y + x = Ce^{-x} + 1$.

6. Решить уравнения, сводя их к линейным:

   6.1 $2xy' = 3y - 4xy^3$ (Бернулли)

   6.2 $y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}$ (Риккати)

Домашнее задание.

1. $(2y - x + 1)dx + (4y - 2x + 6)dy = 0$ 2. $xy' = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ 3. $xydx = (x^2 - y^2)dy$

4. $(x + 2y - 5)dx + (y - x - 4)dy = 0$ 5. $(x + y - 2)y' + x - y = 0$

6. $y' = 4x^2 - \frac{y^2}{x^4}$ 7. $y' = x + \frac{x^3}{y}$ 8. $(x + y^2\cos y)dy = ydx$

9. $dx = (2x + e^y)dy$ 10. $xy' - y + 2xy^2 \ln x = 0$

11. $2xy' + 2xy^3 = y$ 12. $y' + ytgx + 4y^2 \sin x = 0$

13. $4xyy' - 3y^2 + x^2 = 0, y(1) = 1$ 14. $xy' - y + xy^2 = 0$ 15. $y' + e^{-x}y^2 + y = 3e^x$

Дополнительно: Задачи для подготовки к контрольной работе, защите т.р., экзамену:

3.Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.22-10.105,10.130-10.164.

Занятие № 3

Дифференциальные уравнения 1-го порядка (3).

Необходимые сведения.

6. Уравнения Бернулли и уравнения Риккати.

- Уравнение Бернулли – это уравнение вида: $y' + a(x)y = b(x)y^m$
  Оно сводится к линейному заменой: $z = y^{1-m}$.
- Метод Бернулли решения линейного уравнения $y' = P(x)y + Q(x)$:
  ищем решение уравнения в виде $y(x) = u(x)v(x)$.
  Тогда $v(u' - Pu) + (v'u - Q) = 0$
  Выберем функцию любую $u(x)$ так, чтобы первая скобка =0, т.е. $u' = Pu$.
  Подставляем её в уравнение и находим $v(x, C)$.
  Перемножая две найденные функции, находим общее решение линейного уравнения.
  Таким же методом можно решить и уравнение Бернулли.
- Уравнение Риккати – это уравнение вида: $y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$
  Оно сводится к уравнению Бернулли заменой $y(x) - y_0(x) = z(x)$, где $y_0(x)$ - какое-то решение уравнения Риккати

7. Уравнения в полных дифференциалах.

- Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, заданное в области D, называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists$ такая непрерывная в D функция $u(x.y)$, что левая часть уравнения есть полный дифференциал этой функции (du).Тогда решение $u(x.y) = C = const$.
- Достаточным условием того, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, служит равенство: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Задачи для решения в аудитории.

1. **Т.Р. Задача № 4.** Найти общее решение линейного уравнения двумя способами (Методом Лагранжа и методом Бернулли); найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию (НУ):
   $y' + y = x + \cos x$ Н.У.: $y(0) = \dfrac{1}{2}$
2. Решить уравнение методом Бернулли и сравнить с решением, полученным методом Лагранжа (см.занятие №2) :
   $2xy' = 3y - 4xy^3$
3. Решить уравнения Риккати:
   3.1. $y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}$ Указание: $y_0 = e^{-x}$
   3.2 $x^2 y' + 2x^2 y^2 - 5xy + 4 = 0$ Указание: $y_0 = \dfrac{1}{x}$
4. Установить, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах и найти его общее решение:
   4.1 $(y + \sin x)dx + (x + \cos y)dy = 0$
   4.2 $(y - 3x^2 + 1)dx + (x + \ln y)dy = 0$

4.3 $\left(e^{x}+y\right)dx+\left(x+2y\cos y^{2}\right)dy=0$

5. **Т.Р. Задание № 3.** Текстовые задачи

5.1 Сила тока $I(t)$ в цепи с сопротивлением R, индуктивностью L и напряжением U удовлетворяет уравнению $L\frac{dI}{dt}+RI=U$.
Найти силу тока в момент времени t, если
а) $U=const$ б) $U=E\sin\omega t$ и $I(0)=0$ (L,R,E,ω - постоянные)

5.2 Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего на слой света и толщине этого слоя. Зная, что при прохождении слоя воды толщиной 2 м поглощается треть первоначального светового потока, найти какая часть света дойдёт до глубины 12 м.

5.3 Пуля, двигаясь со скоростью $v_0=400м/с$, пробивает стену толщиной $h=20см$ и вылетает, имея скорость 100 м/с . Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время прохождения пули через стену.

5.4 В помещении вместимостью 10 800 кубических метров воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, со скоростью 1500 куб.м/мин. Предполагая, что углекислота распределяется по помещению равномерно в каждый момент времени, найти объёмную долю углекислоты через 10 мин. После начала работы вентиляторов.

5.5 Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

Домашнее задание.

- Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.86 – 10.95 , 10.96 – 10.105, 10.189, 10.193, 10.195, 10.166, 10.169

Занятие № 4

Дифференциальные уравнения 1-го порядка (4).
Необходимые сведения.

8. **Теорема существования и единственности уравнения** $y' = f(x,y)$ **с начальным условием** $y(x_0) = y_0$:

Пусть в замкнутой области $R\{|x - x_0| \le a, |y - y_0 \le b|\}$ функции $f(x,y), \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны. Тогда на некотором отрезке $|x - x_0 \le d|$ существует единственное решение ДУ $y' = f(x,y)$ с Н.У. $y(x_0) = y_0$

9. **Метод последовательных приближений.**

$$y(x_0) = y_0, y_n = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, n = 1,2,...$$

10. **Метод изоклин.** Изоклины – линии равного наклона.

Уравнения изоклин для ДУ $y' = f(x,y)$ **:** $f(x,y) = k = const$

Алгоритм построения интегральных кривых с помощью изоклин:

- Находим уравнения изоклин, изображаем их на чертеже
- На каждой из них изображаем короткие отрезки соответствующего наклона достаточно «густо»
- Проводим интегральные кривые так, чтобы в точках пересечения с изоклинами они имели бы касательными изображённые отрезки.
- Помощь при построении интегральных кривых оказывает знание областей возрастания и убывания решений

Задачи для решения в аудитории.

1. Используя теорему существования и единственности решения задачи Коши, указать области, через каждую точку которых проходит единственная интегральная кривая уравнения :

   1.1 $y' = x + \sqrt[3]{y - x}$ 1.2 $y' = y^3 + \sqrt{x + y}$

   1.3 $(x + y)y' = x\ln y$ 1.4 $xy' = e^x + ctgy$ 1.5 $y' = y + \sqrt{y - x^2}$

2. Найти значения вещественных параметров α, β и линии на плоскости, в каждой точке которых нарушается единственность решения уравнения:

   2.1. $y' = y^\alpha (1 - y)^\beta$ 2.2 $y' = y^\alpha \ln^\beta \dfrac{1}{y}$ 2.3 $y' \ln y = y^\alpha (1 - y)^\beta$

3. Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши, если

   3.1 $y' + y = x + 1$, $y(0) = 1$ 3.2 $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 1$

4. Методом последовательных приближений найти приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ к решению задачи Коши, если

   4.1 $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$ 4.2 $y' = x^2 - 2y^2$, $y(0) = 0$

5. Методом изоклин изобразить приближённо решения уравнений, сравнить с аналитическим решением, если это возможно:

   5.1 $y' = y - x^2$ 5.2 $y' = y^2 + x^2$ 5.3 $y' = \dfrac{y}{x + y}$

6. * (если останется время) Т.Р. Задача №2. Разобрать любой вариант

Домашнее задание.

1. Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.16 – 10.21 (метод изоклин), №№10.106-10.113 (существование и единственность)

Занятие № 5

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Необходимые сведения.

Основные типы уравнений, допускающие понижение порядка .

- Уравнения вида: $y^{(n)} = f(x)$. Правая часть не содержит y и его производных.

Метод понижения порядка: n - кратное интегрирование.

- Уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0$. В уравнение не входит y и его производные до $(k-1)$-го порядка.

Метод понижения порядка: замена $y^{(k)}(x) = z(x)$

- Уравнения вида: $F(y, y',..., y^{(n)}) = 0$. В уравнение в явном виде не входит x.

Метод понижения: замена $y' = p(y), y'' = p(y)p'(y),...$

- Уравнения вида: $\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$. Левая часть может быть представлена полным дифференциалом (интегрируемой комбинацией).

Метод понижения: интегрирование по x понижает порядок на единицу.

- Уравнения вида: $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$, где функция $F(...)$ – однородная функция y и его производных, т.е. $F(x, ty, ty',..., ty^{(n)}) = t^k F(x, y,..., y^{(n)})$.

Метод понижения: подстановка $y' = yz$

Задачи для решения в аудитории.

1.1 Решить уравнение: $y'' = \frac{1}{1+x^2}$;

1.2 Решить задачу Коши: $y'' = xe^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

2.1 Решить уравнение: $y'' = \frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}$;

2.2 Решить задачу Коши: $y''\sin^3 x - \left(y'\sin^2 x + y'^2\right)\cos x = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$

3.1 Решить уравнение: $4y''\sqrt{y} = 1$

3.2 Решить задачу Коши: $y'' = y'^2 + (1-y)y'$, $y(1) = y'(1) = 1$

4.1 Решить уравнение: $yy'' - y'^2 = y'y^2$

4.2 Решить задачу Коши: $y'' + y'^2 = y'e^{y}, y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}$

5.1 Решить уравнение: $y^2 y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + y^3 \sin x = 0$

5.2 Решить задачу Коши: $yy'' = (1-x)y'^2, y(1) = 1, y'(1) = 2$

Домашнее задание.

1. Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.212 – 10.254(понизить порядок, довести до ответа не менее 20 штук)

Методы составления и решения ДУ 1-го и 2-го порядка (повторение).

Задачи для решения в аудитории.

1.Составить ДУ семейства кривых:

(Подсказка: Обратите внимание на то, что в уравнение семейства кривых входят два параметра. Следовательно, искомое уравнение будет уравнением 2-го порядка. Таким образом, надо дифференцировать исходное равенство 2 раза, а затем исключать оба параметра.)

1.1. $y = A\cos(x+\varphi)$ 1.2 $y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$ 1.3. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x$

2.Какие методы решения данных ДУII вы можете предложить? Решите уравнение любым способом:

(Подсказка: данные уравнения как раз являются ответами к задаче 1)

2.1 $y'' + y = 0$ 2.2 $y'' - 2y' + y = 0$ 2.3 $x^2 y'' + xy' - y = 0$

3. Найти ортогональные траектории для заданного семейства плоских кривых:

(Напоминание: у взаимно ортогональных кривых касательные в точке пересечения имеют угловые коэффициенты, связанные равенством: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$)

3.1 $y^2 = Ce^{-(x+y)}$ 3.2 $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$

3.3.Семейство кривых задано в полярных координатах уравнением $\rho(\varphi) = Cf(\varphi)$ где $f(\varphi)$– непрерывно дифференцируемая функция. Составить ДУ ортогональных траекторий. Найти ортогональные траектории семейства кривых $\rho = Ce^{\varphi}$, сделать иллюстрацию.

4. Решить задачу Коши:

(Подсказка: при решении ЗК для ДУ II можно не находить общее решение, а найти решение, удовлетворяющее НУ $y'(x_0) = y_0$, затем проинтегрировать ДУ I и воспользоваться вторым Н.У.)

5.1 $xyy'' + y^2 = xy'^2 + (x-1)yy', y(1) = y'(1) = 2$

5.2 $(y+1)y'' + xy'^2 = 0, y(1) = 0,\ y'(1) = 1/2$

5.3 $y(y'' + y') = y'^2(xy^2 - 1), y(0) = y'(0) = 1$

5.4 $(y+2)y'' + y'^2 = \cos 2x, y(0) = -2, y'(0) = 1$

5.5 $2(yy'' - y'^2) = (y'^2 - 2yy')e^{x^2}, y(0) = 1, y'(0) = 2$

5.6 $x(yy'' - y'^2) = yy'\ln\dfrac{y}{y'}, y(1) = y'(1) = 1$

Домашнее задание.

1.Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.130 – 10.164(задачи на повторение ДУ I), №№10.211-10.254 (задачи на повторение ДУ II)

Занятие № 6

Контрольная работа

Уравнения 1-го порядка и уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Занятие № 7

Однородные линейные уравнения высших порядков.

Необходимые сведения.

1.Линейное однородное уравнение: $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$.

2. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0$.

3.Характеристическое уравнение, соответствующее данному однородному с постоянными коэффициентами: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ - алгебраическое уравнение.

4. Соответствие корней характеристического уравнения и функций, входящих в фундаментальную систему:

	Корни характеристического уравнения	Соответствующие элементы фундаментальной системы решений (ФСР)
1	$\lambda \in R$ - простой, кратность =1	$y = e^{\lambda x}$
2	$\lambda \in R$ - кратный, кратность $= k \neq 1$	$y_0 = e^{\lambda x}$, $y_1 = xe^{\lambda x}$, … , $y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$
3	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ - простая комплексно-сопряжённая пара, кратность =1	$y = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$
4	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ - кратная комплексно-сопряжённая пара, кратность $= k \neq 1$	$y_0 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\tilde{y}_0 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_1 = xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $\tilde{y}_1 = xe^{\alpha x}\sin\beta x$,…… $y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\tilde{y}_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

5.Теорема о структуре общего решения однородного ДУ:

$y_{o.o.} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$, где $\{y_k(x)\}_{k=1}^{n}$ - фундаментальная система решений (n - порядок ДУ).

6. Если известно частное решение линейного однородного уравнения $y_1(x)$, то заменой $y = y_1 \cdot z(x)$ порядок уравнения понижается.

7.

Задачи для решения в аудитории.

1. По данным корням характеристического уравнения ЛОДУ с ПК составить ДУ и написать его общее решение:

   а) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$; б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; в) $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$; г) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; д) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4$

2. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

   а) $y''' + 4y'' + 3y' = 0$ б) $y''' + 2y'' + y' = 0$ в) $y^{(4)} + 4y'' = 0$

   г) $y'' + 4y' + 5y = 0$ д) $y^{(:6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$ е) $y''' - 3y' = 0$

3. Решить задачу Коши: $y'' - 2y' + y = 0$, $y(2) = 1,\ y'(2) = -2$

4. Решить краевую задачу: $y'' + y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 1$
5. Найти общее решение линейного уравнения с переменными коэффициентами, если функция $y_1(x)$ - его частное решение:

   а) $xy'' + 2y' + xy = 0,\ \ y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ б)

   $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ \ y_1 = x$

Домашнее задание.

1.Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.321-10.339

Занятие № 8

Неоднородные линейные уравнения высших порядков. (метод подбора частного решения при специальной правой части) Необходимые сведения.

1.Линейное неоднородное уравнение: $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$.

Примечание: преимущественно будем рассматривать ЛНДУ N с ПК (постоянными коэф-тами)

2. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ:

$$\boxed{y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}}.$$

Здесь $y_{о.о.} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$, где $\{y_k(x)\}_{k=1}^{n}$ - ФСР соответствующего однородного уравнения,

$y_{ч.н.}$ - частное решение неоднородного уравнения.

3.<u>Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для отыскания решения ЛНДУ N</u> .

Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^{n}$ - ФСР соответствующего ЛОДУ N.

Общее решение ЛНДУ N находится в виде: $\boxed{y_{о.н.} = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x)}$, где

неизвестные функции $C_k(x)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C'(x)_1 y_1 + C_2'(x)y_2 + ... + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x)y_n' = 0 \\ :: \\ C'(x)_1 y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y^{(n-1)}{}_2 + ... + C_n'(x)y^{(n-1)}{}_n = f(x) \end{cases}$$

4.<u> Метод подбора частного решения ЛНДУ N по виду его правой части.</u>

- <u>Принцип «суперпозиции»</u>

Если y_1 – решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, а y_2 - решение уравнения $L[y] = f_2(x)$,
то $y_1 + y_2$ – решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$

<u>Подбор решения по правой части для уравнения</u>

$\underline{L[y] = e^{\alpha x}(A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x)}$.

Если правая часть уравнения имеет специальный вид (является квазимногочленом), т.е. представляется в виде сумм и произведений функций: $x^n, e^{\alpha x}, \cos\beta x, \sin\beta x$, то частное решение ищется в виде правой части с неизвестными коэффициентами в соответствии с видом корней характеристического уравнения.

	Нерезонансный случай	Резонансный случай
1	Число $\alpha + i\beta$ в правой части уравнения не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения	Число $\alpha + i\beta$ в правой части уравнения совпадает с одним из корней характеристического уравнения
2	Частное решение ищется в виде правой части, т.е. в виде: $e^{\alpha x}(M_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x)$.	Частное решение ищется в виде $x^{\kappa}e^{\alpha x}(M_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x)$, где κ - кратность корня характеристического уравнения, совпадающего с числом $\alpha + i\beta$.

Рекомендация: Рассмотреть контрольный вопрос из Т.Р.№2 на стр.20 №2.5

Задачи для решения в аудитории.

I. Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1.1. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

1.2. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{2e^{-x}}{\cos 2x}$

II. Решить линейные неоднородные уравнения, подобрав частное решение по виду правой части:

2.1 $y'' - 3y' + 2y = (1+x)e^{2x}$

2.2 $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$

2.3 $y'' - y' = (4x+3)e^{x} - 2\cos x$

III. Написать вид частного решения неоднородного уравнения с неопределёнными коэффициентами:

3.1 $y''' - 6y'' + 10y' = 13\cos x + 10x$
3.2 $y''' - 2y'' = 16\sin 2x - 12x$

3.3 $y^{IV} + 2y'' + y = 18\sin^2 x + 3\sin 2x + x^3$

Домашнее задание.

1. Сб.задач Ефимов-Поспелов т.2: №№ 10.346-10.353, 10.360-10.367, 10.370, 10.374, 10.376.

Занятие № 9
Метод вариации произвольных постоянных

Занятие № 10-11
Системы линейных уравнений

Системой дифференциальных уравнений называют совокупность дифференциальных уравнений, т.е. уравнений, содержащих независимые переменные, неизвестные функции и их производные (или дифференциалы).

Система n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно всех производных, называется *нормальной*. Она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \quad .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

(1)

где $y_1, y_2, ..., y_n$ — неизвестные функции независимой переменной x; $f_1, f_2, ..., f_n$ — известные функции, зависящие от x, $y_1, y_2, ..., y_n$, заданные и непрерывные в некоторой области.

Число уравнений, входящих в систему, называют *порядком* системы.

Решить систему или *проинтегрировать* в некотором интервале $[a, b]$ — значит найти совокупность n функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, определённых и непрерывно дифференцируемых в указанном интервале, обращающих каждое уравнение системы в тождество.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (1) состоит в нахождении решения

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x),$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \; ..., \; y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

Геометрический смысл задачи Коши заключается в нахождении среди всех интегральных кривых тех, которые проходят через точки (x_0, y_1^0), … ,(x_0, y_n^0).

Общим решением системы (1) называют совокупность n функций:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \\ \quad .... \\ y_n = y_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \end{cases}$$

зависящих от переменной x и произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ определены в области изменения переменной x и имеют непрерывные частные производные по x;

2) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ должны являться решением системы (1) при любых значениях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частным решением системы (1) называют решение, полученное из общего при некоторых частных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Интегралом нормальной системы (1) называют функцию

$$\psi\,(x,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n),$$

которая в области изменения переменных:

1) определена и непрерывна вместе с частными производными

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial\psi}{\partial y_n};$$

2) принимает при любых x постоянное значение при подстановке в неё произвольного решения системы.

Функция $\psi\,(x,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ зависит только от выбора решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, но не зависит от переменной x.

Первым интегралом нормальной системы (1) называют равенство

$$\psi\,(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C,$$

где $\psi\,(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ — интеграл нормальной системы (1); C — произвольная постоянная.

Иногда первым интегралом системы (1) называют просто интеграл этой системы.

При решении систем часто используют следующее *утверждение*: систему дифференциальных уравнений (1) можно свести к одному дифференциальному уравнению n-го порядка:

$$y^{(n)} = f\,(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ ...,\ y^{(n-1)}),$$

и наоборот, одно дифференциальное уравнение n-го порядка можно свести к системе дифференциальных уравнений (1).

Пример 1. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y'' + 2\,y - 3 = 0$.

Решение. Пусть $y' = z$, тогда $y'' = z'$ и уравнение приводится к нормальной системе

$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = 3 - 2y. \end{cases}$$

Пример 2. Привести нормальную систему

$$\begin{cases} y' = 3—z; \\ z' = 1 + 6y + z \end{cases}$$

к одному дифференциальному уравнению.

Решение. Из первого уравнения системы выразим $z = 3y - y' \Rightarrow z' = 3\,y' - y''$. Подставим значения z и z' во второе уравнение системы, получим $3y' - y'' = 1 + 6y + 3y - y' \Rightarrow$

$$y'' - 4\,y' + 9y + 1 = 0$$

— линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Решение различных прикладных задач приводит к так называемым линейным системам дифференциальных уравнений.

Система называется *линейной*, если неизвестные функции и их производные (или дифференциалы) входят в каждое из уравнений только в первой степени. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \qquad\qquad \ldots . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

(2)

где функции $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ ($i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n$) непрерывны в некотором интервале.

Если все $f_i(x) = 0$, то система (2) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Если $a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$, то система (2) называется *линейной с постоянными коэффициентами*.

Существуют различные методы решения систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим простейшие из них.

3.1. Метод исключения

Метод исключения основан на следующем утверждении: нормальная система n дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна одному дифференциальному уравнению n—го порядка. Следовательно, можно исключить в системе (1) все неизвестные функции, кроме одной, и получить одно дифференциальное уравнение n-го порядка.

Свести нормальную систему (1) к одному уравнению можно дифференцированием одного из уравнений системы и последовательным исключением всех неизвестных, кроме одного. Каким образом это можно осуществить рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x; \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 + x; \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом исключения.

1. Дифференцируем по x любое, например первое уравнение заданной системы и подставляем вместо y'_1, y'_2, y'_3 их выражения из этой системы. В результате получим

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3' + e^x = 3(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) - (y_1 + y_2 + y_3 - x) + 4y_1 - y_2 + 4y_3 + e^x =$$
$$= 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x.$$

Дифференцируем y''_1, по x и опять заменяем y'_1, y'_2, y'_3 их выражениями из системы:

$$y_1''' = 12y_1' - 5y_2' + 6y_3' + 4e^x + 1 = 12(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) - 5(y_1 + y_2 + y_3 - x) + 6(4y_1 - y_2 + 4y_3) +$$
$$+ 4e^x + x = 55y_1 - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x$$

Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x; \\ y_1'' = 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x; \\ y_1''' = 55y_1 - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x. \end{cases}$$

(3)

Из первых двух уравнений находим y_2 и y_3:

$$y_2 = y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x;$$

$$y_3 = y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x.$$

(4)

Выражения для y_2 и y_3 подставим в третье уравнение системы (3):

$$y_1''' = 55y_1 - 23(y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x) + 31(y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x) + 16e^x + 6x = 8y_1'' - 17y_1' +$$
$$+10y_1 + e^x - 2x$$

Получили неоднородное линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = e^x - 2x.$$

(5)

Его общее решение найдём по формуле

$$y_1 = y_1^0 + y_1^*,$$

где y_1^0 — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения;

y_1^* — частное решение линейного неоднородного уравнения (5).

2. Найдём общее решение y_1^0 соответствующего линейного однородного уравнения $y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = 0$.

Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0.$$

Его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ — простые действительные числа (п. 2.3, случай 1). Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y^0{}_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}.$$

3. Найдём частное решение y_1^* линейного неоднородного уравнения (4) методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения (5) $f(x) = e^x - 2x$ является суммой двух специальных функций $f_1(x) =$ и $f_2(x) = -2x$, следовательно, частным решением уравнения (5) будет являться $y_1^* = y_1^{*1} + y_1^{*2}$, где y_1^{*1} и y_1^{*2} — частные решения неоднородных линейных уравнений $y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = f_1(x)$ и $y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = f_2(x)$.

Для $f_1(x) =$ $k = 1$, для $f_2(x) = -2x$ $k = 0$, тогда получаем частное решение y_1^* линейного неоднородного уравнения (5):

$$y_1^* = A_1 x e^x + A_2 x + A_3.$$

Найдём неизвестные величины A_1, A_2, A_3. Для этого продифференцируем три раза полученное уравнение:

$$y_1^{*\prime} = A_1 x e^x + A_1 e^x + A_2;$$
$$y_1^{*\prime\prime} = A_1 x e^x + 2A_1 e^x;$$
$$y_1^{*\prime\prime\prime} = A_1 x e^x + 3A_1 e^x.$$

Подставим выражения для $y_1^{*\prime\prime\prime}$, $y_1^{*\prime\prime}$, $y_1^{*\prime}$ и y_1^* в уравнение (5):

$$A_1 x e^x + 3A_1 e^x - 8(A_1 x e^x + 2A_1 e^x) + 17(A_1 x e^x + A_1 e^x + A_2) - 10(A_1 x e^x + A_2 x + A_3) = e^x - 2x.$$

После преобразований получим уравнение:

$$4A_1 e^x + 17A_2 - 10A_2 x - 10A_3 = e^x - 2x.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях при соответствующих выражениях, получим:

$$A_1 = 1/4; \; A_2 = 1/5; \; A_3 = 17/50.$$

Подставим эти значения в частное решение y_1^* линейного неоднородного уравнения (5):

$$y_1^* = \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{5} x + \frac{17}{50}.$$

4. Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами (5) имеет вид

$$y_1 = y_1^{\,0} + y_1^{\,*} = C_1 e^{x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}.$$

5. Найдём производные y'_1, y''_1:

$$y'_1 = C_1 e^{x} + 2C_2\, e^{2x} + 5C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{4}\, e^{x} + \frac{1}{5};$$

$$y''_1 = C_1 e^{x} + 4C_2\, e^{2x} + 25C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{2}\, e^{x}.$$

Подставим найденные значения y'_1, y''_1 в равенства (4):

$$y_2 = y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^{x} - x = C_1 e^{x} + 4C_2\, e^{2x} + 25C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{2}\, e^{x} - 6(C_1 e^{x} + 2C_2\, e^{2x} +$$

$$+ 5C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{4}\, e^{x} + \frac{1}{5}) + 6(C_1 e^{x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}) + 2\, e^{x} - x =$$

$$= C_1 e^{x} - 2C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25} - e^{x};$$

$$y_3 = y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^{x} - x = C_1 e^{x} + 4C_2\, e^{2x} + 25C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{2}\, e^{x} - 5(C_1 e^{x} + 2C_2\, e^{2x} +$$

$$+ 5C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{4}\, e^{x} + \frac{1}{5}) + 3(C_1 e^{x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}\, x\, e^{x} + \frac{1}{5}\, x + \frac{17}{50}) + e^{x} - x =$$

$$= C_1 e^{x} - 3C_2\, e^{2x} + 3C_3 e^{5} - \frac{1}{4}x\, e^{x} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{50}.$$

Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид

$$y_1 = C_1 e^{x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50};$$

$$y_2 = C_1 e^{x} - 2C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x} + \frac{1}{4}x\, e^{x} + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25} - e^{x};$$

$$y_3 = -\,C_1 e^{x} - 3C_2\, e^{2x} + 3C_3\, e^{5x} - \frac{1}{4}x\, e^{x} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{50}.$$

Пример 2. *Фильтр низких частот.*

На электрической схеме (рис. 12) равные индуктивности L, ёмкость C и сопротивление нагрузки R подключены к источнику напряжения, изменяющемуся по закону $U\,(t) = U \cos$ щt. Выяснить характер колебаний падения напряжения на нагрузке, ограничиваясь установившимся процессом.

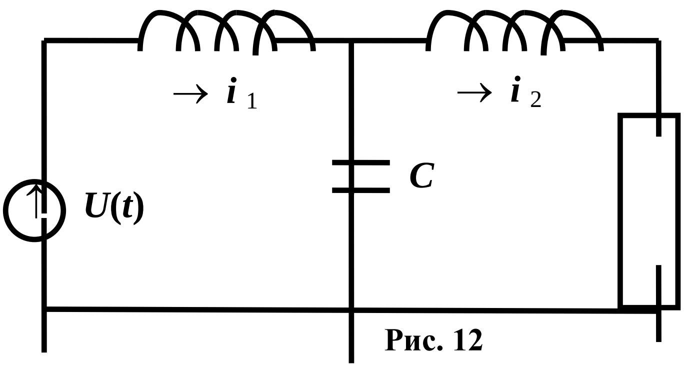

Рис. 12

Решение. Обозначим через i_1, i_2 — токи в левом и правом контурах. Тогда ток через ёмкость равен $i_2 - i_1$. По закону Кирхгофа получим систему дифференциальных уравнений относительно токов i_1, i_2:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\,i_1}{d\,t} + L\dfrac{d\,i_2}{d\,t} + Ri_2 = U(t); \\ L\dfrac{d\,i_2}{d\,t} + R\,i_2 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t (i_2 - i_1)dt = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения. Дифференцируем по t любое, например второе, уравнение заданной системы, получим

$$L\frac{d^2 i_2}{d\,t^2} + R\frac{d\,i_2}{d\,t} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0\,.$$

Откуда

$$i_1 = LC\frac{d^2 i_2}{d\,t^2} + RC\frac{d\,i_2}{d\,t} + i_2\,.$$

Полученное уравнение ещё раз дифференцируем по t и подставим в первое уравнение системы. В результате получим

$$L^2\,C\frac{d^3 i_2}{d\,t^3} + LRC\frac{d^2 i_2}{d\,t^2} + 2\,L\frac{d\,i_2}{d\,t} + R\,i_2 = U(\,t)$$

— линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем для него характеристическое уравнение

$$L^2C\,k^3 + LRC\,k^2 + 2L\,k + R = 0\,.$$

Все слагаемые в левой части этого уравнения положительны, поэтому оно не имеет действительных корней, его корни — комплексные. Можно доказать, что у мнимых корней этого уравнения действительные части отрицательные.

Таким образом, все слагаемые общего решения однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению, содержат экспоненты с отрицательным показателем и поэтому быстро убывают при росте t. Установившийся процесс определяется частным решением исходного неоднородного уравнения.

Поскольку правая часть $U\,(t) = U\cos\,\omega\,t$, то частное решение ищем в виде

$$i_2 = i_2^* = A\cos\,\omega\,t + B\sin\,\omega\,t.$$

Дифференцируем по t полученное уравнение и подставим в исходное неоднородное уравнение. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A(-2L\omega + L^2C\omega^3) + B(R - LRC\omega^2) = 0; \\ A(R - LRC\omega^2) + B(2L\omega - L^2C\omega^3) = U. \end{cases}$$

Обозначив б $= -\,2\,L\,\omega + L^2C\,\omega^3$, в $= R - LCR\,\omega^2$, приходим к системе

$$\begin{cases} \alpha\;A + \beta\;e = 0; \\ \beta\;\;A - \alpha\;e = U. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A = \dfrac{\beta\,U}{\alpha^2 + \beta^2}; \\ e = \dfrac{-\,\alpha\,U}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

Найдём амплитуду решения i_2 как $\sqrt{A^2 + B^2}$, т.е.

$$|v| = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|U|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\,,$$

или

$$|v| = \frac{|U|}{\sqrt{L^2\omega^2(LC\omega^2 - 2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}\,.$$

Падение напряжения на нагрузке можно получить из последнего уравнения умножением обеих частей равенства на R, т.к. $U_2 = R\, i_2$.

Выясним влияние частоты колебаний щ на отношение амплитуд напряжения на нагрузке к выходному напряжению.

При малых частотах ω величинами порядка ω^2 и выше можно пренебречь, тогда подкоренное выражение будет равно R^2, следовательно,

$$|v| \approx \frac{|U|}{R} \quad \Rightarrow \quad |v| \cdot \frac{R}{|U|} \approx 1.$$

Эта зависимость показывает, что колебания малой частоты проходят через схему, практически не изменяя амплитуды.

Для больших частот ω главным членом подкоренного выражения будет член со старшей степенью ω. Для таких частот

$$|v| \approx \frac{|U|}{L^2 C \omega^3} \quad \Rightarrow \quad |v| \cdot \frac{R}{|U|} \approx \frac{R}{L^2 C \omega^3} \approx 0,$$

т.е. колебания высокой частоты практически не проходят через данную схему.

Данная схема пропускает низкие частоты и почти не пропускает высоких частот. Поэтому такую схему называют *фильтром низких частот*.

3.2. Метод интегрируемых комбинаций

Данный метод заключается в том, что путём различных преобразований уравнения исходной системы (1) приводят к простому виду, позволяющему их легко проинтегрировать и получить решение системы. Полученные таким образом уравнения называют *интегрируемыми комбинациями*.

Обычно интегрируемую комбинацию получают с помощью сложения, вычитания, умножения или деления исходных уравнений системы.

Каждая интегрируемая комбинация даёт один первый интеграл. Если найдено n независимых первых интегралов системы (1), то её интегрирование закончено. Если найдено m независимых первых интегралов, где $n > m$, то система (1) сводится к системе с меньшим числом неизвестных функций.

Пример 1. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x+y}; \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0) = 2$, $y(0) = 4$.

Решение. Данная система является нормальной системой двух дифференциальных уравнений.

Решим систему методом интегрируемых комбинаций.

1. Найдём общее решение системы. Для этого составим первую интегрируемую комбинацию. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

— дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные x и y: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$; проинтегрируем, получим

$$x = C_1 y.$$

Составим вторую интегрируемую комбинацию. Сложив оба уравнения системы, получим

$$\frac{dx+dy}{dt}=1 \quad\Rightarrow\quad dx+dy=dt \quad\Rightarrow\quad x+y=t+C_2.$$

Таким образом, получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x=C_1y; \\ x+y=t+C_2. \end{cases}$$

Откуда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x=C_1\dfrac{t+C_2}{1+C_1}; \\ y=\dfrac{t+C_2}{1+C_1}. \end{cases}$$

2. Найдём частное решение системы. Подставим начальные условия в общее решение системы:

$$\begin{cases} 2=C_1\dfrac{C_2}{1+C_1}; \\ 4=\dfrac{C_2}{1+C_1}. \end{cases} \qquad \text{Откуда } C_1=\frac{1}{2}, \quad C_2=6.$$

Частное решение заданной системы примет вид:

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}+2; \\ y=\dfrac{2t}{3}+4. \end{cases}$$

Пример 2. *Разложение вещества.*

Вещество A разлагается на два вещества X и $У$ со скоростью образования каждого из них, пропорциональной количеству неразложившегося вещества. Найти закон изменения количеств x и y веществ X и $У$ в зависимости от времени t, если при $t=0$ имеем $x=y=0$, а через час $x=a/8$, $y=3a/8$, где a — первоначальное количество вещества A.

Решение. В момент времени t количество неразложившегося вещества A равно $a-x-y$. Введём следующие обозначения:

$\dfrac{dx}{dt}$ — скорость образования вещества X;

$\dfrac{dy}{dt}$ — скорость образования вещества $У$.

Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=k_1(a-x-y); \\ \dfrac{dy}{dt}=k_2(a-x-y), \end{cases}$$

где k_1, k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Решим систему методом интегрируемых комбинаций.

Разделим обе части второго уравнения системы на соответствующие части первого:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k_2}{k_1} \qquad\Rightarrow\qquad — =\frac{k_2}{k_1}›+C_1.$$

Поскольку при $t=0$ имеем $x=y=0$, то из последнего уравнения находим $C_1=0$, а значит

$$y=\frac{k_2}{k_1}x.$$

Полученную функцию подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a - x - \frac{k_2}{k_1}x) = k_1a - k_1x - k_2x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1a\,.$$

Это уравнение является линейным неоднородным уравнением первого порядка, общее решение которого

$$x = \frac{k_1a}{k_1 + k_2} + C_2e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1a}{k_1 + k_2} + C_2e^{-(k_1+k_2)t}; \\ y = \dfrac{k_2x}{k_1} + C_1. \end{cases}$$

Используя начальное условие: при $t = 0$ $x = 0$, найдём

$$C_2 = -\frac{k_1a}{k_1 + k_2}.$$

Таким образом, частное решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1a}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}); \\ y = \dfrac{k_2x}{k_1}. \end{cases}$$

Это законы изменения количеств x и y веществ X и $У$ в зависимости от времени t.

Коэффициенты пропорциональности k_1, k_2 найдём из условия, что при $t = 1$ $x = a/8$, $y = 3a/8$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8} = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)}); \\ 3 = \dfrac{k_2}{k_1}. \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3k_1 = k_2; \\ \dfrac{1}{8} = \dfrac{k_1}{4k_1}(1 - e^{-4k_1}). \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3k_1 = k_2; \\ \dfrac{1}{2} = 1 - e^{-4k_1}. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 3k_1 = k_2; \\ \dfrac{1}{2} = e^{-4k_1}. \end{cases} \quad \Rightarrow k_1 = \frac{\ln 2}{4},\ k_2 = \frac{3\ln 2}{4}.$$

Таким образом, искомое решение системы, т.е. закон изменения количеств x и y веществ
X и $У$ в зависимости от времени t, принимает вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{4}(1 - 2^{-t}); \\ y = \dfrac{3a}{4}(1 - 2^{-t}). \end{cases}$$

3.3. Метод Эйлера

Метод Эйлера часто называют *видоизменённым методом Эйлера* или *методом собственных чисел и собственных векторов*. Он применяется для решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дана система n линейных однородных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \qquad \ldots. \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{d\,t} = A \cdot X\,,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\qquad \dfrac{dX}{d\,t} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{d\,t} \\ \dfrac{dx_2}{d\,t} \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{d\,t} \end{pmatrix}$.

Решение системы найдём в виде: $\begin{cases} x_1 = p_1 e^{\lambda t}; \\ x_2 = p_2 e^{\lambda t}; \\ \quad \ldots. \\ x_n = p_n e^{\lambda t}, \end{cases}$

где λ, p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — постоянные величины.

Подставив значения x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) в систему дифференциальных уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно p_i:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0; \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0; \\ \qquad \ldots. \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)p_n = 0. \end{cases}$$

Так как система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы равен нулю, то получим следующее уравнение n-й степени:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение позволит найти λ. Оно является *характеристическим уравнением* матрицы A и одновременно характеристическим уравнением системы.

Пусть характеристическое уравнение имеет n различных корней λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), которые являются *характеристическими числами* матрицы A. Каждому характеристическому числу соответствует свой собственный вектор.

Пусть характеристическому числу λ_k соответствует собственный вектор (p_{1k} ; p_{2k} ; ... ; p_{nk}), где k = 1, 2, ..., n. Тогда система дифференциальных уравнений имеет n решений:

1-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t}, x_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t}, ..., x_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t}, x_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t}, ..., x_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t} \quad \text{и т.д.;}$$

n-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n t}, x_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n t}, ..., x_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Таким образом, получили фундаментальную систему решений. Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \ldots + C_n x_{1n}; \\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \ldots + C_{2n} x_{2n}; \\ \quad\quad\quad\quad \ldots. \\ x_n = C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + \ldots + C_n x_{nn}. \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной однородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Эйлера.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 2$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda_1 = -2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} 2p_1 - 2p_2 = 0; \\ -2p_1 + 2p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 - p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow$$

(1; 1) — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -2p_1 - 2p_2 = 0; \\ -2p_1 - 2p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2 \Rightarrow$$

(1; – 1) — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = -2$: $x_{11} = e^{-2t}$, $x_{21} = e^{-2t}$;

для $\lambda_2 = 2$: $x_{12} = e^{2t}$, $x_{22} = -e^{2t}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}; \\ x_2 = C_1 e^{-2t} - C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной однородной системой дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Эйлера.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda_1 = -1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 + p_3 = 0; \\ p_1 + 2p_2 - p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 + p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = -3p_1; \\ p_3 = -5p_1. \end{cases} \Rightarrow$$

(1; – 3; – 5) — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -p_2 + p_3 = 0; \\ p_1 - p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 - p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 \Rightarrow$$

(1; 1; 1) — собственный вектор.

При $\lambda_3 = 2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -p_1 - p_2 + p_3 = 0; \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 - 2p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = 0; \\ p_3 = p_1. \end{cases} \Rightarrow$$

(1; 0; 1) — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = -1$: $x_{11} = e^{-t}$, $x_{21} = -3\,e^{-t}$, $x_{31} = -5\,e^{-t}$;

для $\lambda_2 = 1$: $x_{12} = e^{t}$, $x_{22} = e^{t}$, $x_{32} = e^{t}$;

для $\lambda_3 = 2$: $x_{13} = e^{2t}$, $x_{23} = 0$, $x_{33} = e^{2t}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t}; \\ x_2 = -3C_1e^{-t} + C_2e^{t}; \\ x_3 = -5C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной однородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Эйлера.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda - 4)^2 + 9 = 0.$

Его корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$ — комплексные, являются характеристическими числами матрицы. Найдём для них собственные векторы.

При $\lambda_1 = 4 + 3i$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} 3i \cdot p_1 - 3p_2 = 0; \\ 3p_1 + 3i \cdot p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_2 = i\, p_1 \Rightarrow (1;\, i)$ — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 4 - 3i$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -3i \cdot p_1 - 3p_2 = 0; \\ 3p_1 - 3i \cdot p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 = i\, p_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1;\, -i)$ — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = 4 + 3i$: $x_{11} = e^{(4+3i)\,t} = e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t)$, $x_{21} = i\, e^{(4+3i)\,t} = e^{4t}(-\sin 3t + i\cos 3t)$;

для $\lambda_2 = 4 - 3i$: $x_{12} = e^{(4-3i)\,t} = e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t)$, $x_{22} = i\, e^{(4-3i)\,t} = e^{4t}(-\sin 3t - i\cos 3t)$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = e^{4t}((C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)\, i \sin 3t); \\ x_2 = e^{4t}(-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)\, i \cos 3t). \end{cases}$$

Введя замену: $C_1 + C_2 = C_1^*$; $(C_1 - C_2)\, i = C_2^*$, получим

$$\begin{cases} x_1 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t); \\ x_2 = e^{4t}(-C_1^* \sin 3t + C_2^* - \mathrm{os}\, 3t). \end{cases}$$

Общее решение для комплексных корней характеристического уравнения можно найти другим способом. В решениях, соответствующих одному из комплексных характеристических чисел, отделим действительную и мнимую части:

$$e^{(4+3i)\,t} = e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t) = e^{4t}\cos 3t + i\, e^{4t} \sin 3t;$$

$$i\, e^{(4+3i)\,t} = -\, e^{4t} \sin 3t + i\, e^{4t} \cos 3t.$$

Получим линейно независимые частные решения:

$$x_{11} = e^{4t}\cos 3t;$$
$$x_{21} = -\, e^{4t}\sin 3t;$$
$$x_{12} = e^{4t}\sin 3t;$$
$$x_{22} = e^{4t}\cos 3t.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12}; \\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t); \\ x_2 = e^{4t}(-C_1 \sin 3t + C_2 - \mathrm{os}\, 3t). \end{cases}$$

Заметим, что сопряжённое характеристическое число мы не рассматривали, т.к. решения, соответствующие корню $a - bi$, линейно зависимы с решениями для корня $a + bi$.

3.4. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа или *метод вариации произвольных постоянных* применяется для решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим суть метода Лагранжа на примере системы трёх неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дана система трёх линейных неоднородных дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные:

$$\begin{cases} x' + a_1 x + b_1 y + e_1 z = f_1(t); \\ y' + a_2 x + b_2 y + e_2 z = f_2(t); \\ z' + a_3 x + b_3 y + e_3 z = f_3(t). \end{cases}$$

(6)

Пусть общее решение соответствующей однородной системы найдено и имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3; \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3; \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3. \end{cases}$$

(7)

Будем искать решение неоднородной системы в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t) x_1 + C_2(t) x_2 + C_3(t) x_3; \\ y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2 + C_3(t) y_3; \\ z = C_1(t) z_1 + C_2(t) z_2 + C_3(t) z_3, \end{cases}$$

(8)

где $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ — неизвестные функции, которые нужно найти.

Подставим (8) в (6), тогда первое уравнение системы (6) примет вид:

$$C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 + C_1(x_1' + a_1 x_1 + b_1 y_1 + e_1 z_1) + C_2(x_2' + a_1 x_2 + b_1 y_2 + e_1 z_2) + C_3(x_3' + a_1 x_3 + b_1 y_3 + e_1 z_3) = f_1(t).$$

Все выражения, стоящие в скобках, обратятся в ноль, т.к. (7) — решение соответствующей однородной системы. Тогда получим

$$C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 = f_1(t).$$

Аналогично, после подстановки (8) в (6) второе и третье уравнения системы (6) примут вид:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = f_2(t),$$
$$C_1' z_1 + C_2' z_2 + C_3' z_3 = f_3(t).$$

Таким образом, получили систему трёх линейных относительно C_1', C_2', C_3' уравнений. Она имеет решение, т.к. её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3. \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу линейной независимости частных решений соответствующей однородной системы.

Вычислим C_1', C_2', C_3'. Затем, интегрируя эти выражения, найдём $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, а следовательно, и решение (8) неоднородной системы (6).

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Лагранжа.

1. Сначала решим соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем: $x = -\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{d^2y}{dt^2}$. Подставим эти выражения в первое уравнение однородной системы:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 .$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0.$$

Его корни ($D < 0$) $k_{1,2} = \pm\, i$ — комплексные сопряжённые числа (п. 2.3; случай 3; $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Следовательно, общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y = e^{0\,t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Так как $x = -\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow x = C_1 \sin t - C_2 \cos t$. Таким образом, общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$x = C_1 \sin t - C_2 \cos t;$$
$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

2. Будем искать общее решение неоднородной системы в виде:

$$x = C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t;$$
$$y = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t.$$

Подставим эти выражения и их производные в данную неоднородную систему. После преобразований получим:

$$\begin{cases} C_1' \sin t - C_2' \cos t = 0; \\ C_1' \cos t + C_2' \sin t = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = tg\, t; \\ C_1' = 1. \end{cases}$$

Интегрируя, найдём:

$$\begin{cases} C_2(t) = -\ln(\cos t) + C_2; \\ C_1(t) = t + C_1, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подставим эти значения в общее решение неоднородной системы, получим:

$$\begin{cases} x = (t + C_1)\sin t + (\ln(\cos t) - C_2)\cos t; \\ y = (t + C_1)\cos t - (\ln(\cos t) - C_2)\sin t. \end{cases}$$

3.5. Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов или *метод подбора* применяется для решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2) тогда, когда функции $f_i(x)$ ($i = 1, ..., n$), стоящие в правой части системы, имеют специальный вид: многочлены, экспоненциальные функции, синусы, косинусы, а также сумма или произведения этих функций. Исходя из вида правой части находят частное решение неоднородной системы (табл. 2, п. 2.4).

Метод неопределённых коэффициентов основан на следующей теореме:

Общее решение линейной неоднородной системы (2) равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и любого частного решения данной неоднородной системы.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y; \\ \dfrac{dx}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом подбора.

1. Сначала найдём методом Эйлера общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x - 2y = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} - x = 0. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$

Его корни (характеристические числа матрицы) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 2$ — простые действительные числа.

Общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x^0 = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}; \\ y^0 = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

2. Найдём частное решение неоднородной системы в виде (поскольку $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = -5\sin t$):

$$x^* = A\cos t + B\sin t;$$
$$y^* = C\cos t + D\sin t.$$

Подставим эти выражения и их производные в данную неоднородную систему:

$$-A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t + 2(C\cos t + D\sin t);$$
$$-C\sin t + D\cos t = A\cos t + B\sin t - 5\sin t.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в обеих частях равенств, получим:

$$\begin{cases} -A = B + 2D; \\ B = A + 2C; \\ -C = B - 5; \\ D = A. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1; \\ B = 3; \\ C = 2; \\ D = -1. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородной системы имеет вид:

$$x^* = -\cos t + 3\sin t;$$
$$y^* = 2\cos t - \sin t.$$

3. Получим общее решение исходной неоднородной системы как сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения данной неоднородной системы :

$$\begin{cases} x = x^0 + x^* = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t; \\ y = y^0 + y^* = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y - t^2. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Лагранжа.

1. Сначала решим методом Эйлера соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$

Его корни $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda_1 = 1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид

$$\begin{cases} -p_1 + p_2 = 0; \\ -2p_1 + 2p_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow p_1 - p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow (1;\ 1)$ — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -2p_1 + p_2 = 0; \\ -2p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow p_2 = 2p_1 \Rightarrow (1;\ 2)$ — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = 1$: $x_{11} = e^t$, $x_{21} = e^t$;

для $\lambda_2 = 2$: $x_{12} = e^{2t}$, $x_{22} = 2e^{2t}$.

Общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x^0 = C_1 e^t + C_2 e^{2t}; \\ y^0 = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

2. Найдём частное решение неоднородной системы в виде (поскольку $f_1(t) = t$, $f_2(t) = -t^2$):

$$x^* = A\,t^2 + B\,t + C;$$
$$y^* = D\,t^2 + E\,t + F.$$

Подставим эти выражения и их производные в данную неоднородную систему:

$$2A\,t + B = D\,t^2 + E\,t + F + t;$$
$$2D\,t + E = -2(A\,t^2 + B\,t + C) + 3\,(D\,t^2 + E\,t + F) - t^2.$$

$$\Rightarrow$$

$$2A\,t + B = D\,t^2 + (E + 1)\,t + F;$$
$$2D\,t + E = (-2A + 3D - 1)t^2 + (-2B + 3\,E)\,t - 2C + 3F.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного t в обеих частях равенств, получим:

$$\begin{cases} 0 = D; \\ 2A = E + 1; \\ B = F; \\ 0 = -2A + 3D - 1; \\ 2D = -2B + 3E; \\ E = -2C + 3F. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2; \\ B = F = -3; \\ C = -7/2; \\ D = 0; \\ E = -2. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x^* = -\dfrac{1}{2}t^2 - 3t - \dfrac{7}{2}; \\ y^* = -2t - 3. \end{cases}$$

3. Получим общее решение исходной неоднородной системы как сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения данной неоднородной системы :

$$\begin{cases} x = x^0 + x^* = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2}t^2 - 3t - \dfrac{7}{2}; \\ y = y^0 + y^* = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - 2t - 3. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

Решить системы дифференциальных уравнений (1—15):

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + 4y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x + y \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

Решить задачу Коши для следующих систем дифференциальных уравнений (16—18):

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y, \ \mathrm{x}(0) = 2, \ \mathrm{y}(0) = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = y + z; \\ y' = x + z; \quad x(0) = 1; \ y(0) = -1; \ z(0) = 0. \\ z' = x + y, \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t, \ \mathrm{x}(0) = 3, \ \mathrm{y}(0) = 1. \end{cases}$

Занятие № 12

Преобразование Лапласа (1).

Необходимые сведения.

Таблица «Основные оригиналы и их изображения».

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$		Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1	1	$\frac{1}{p}$	8	$\sin(t-\alpha),\alpha>0$	$\frac{1}{p^2+1}e^{-\alpha p}$
2	$t^n, n=1,2,...$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	9	$\cos(t-\alpha),\alpha>0$	$\frac{p}{p^2+1}e^{-\alpha p}$
3	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	10	$t^n e^{\lambda t}, n=1,2,...$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	11	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
5	$cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	12	$e^{\lambda t}\,cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
6	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	13	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
7	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	14	$t\,cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Задачи для решения в аудитории.

1. Пользуясь определением, найти изображения функций: e^{2t}, $\sin 3t$, te^t.
2. Пользуясь теоремой подобия: $f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\alpha>0$, найти изображения следующих функций: e^{2t}, $\sin 3t$.
3. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала: $f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$, найти изображения следующих функций:

   $\sin^2 t$, te^t. (Сделайте проверку другим способом).

4. Пользуясь теоремой дифференцирования изображения: $F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t)$, найти изображения функций: t^2e^t, $tsh3t$.

5. Пользуясь теоремой интегрирования оригинала: $f(t) \div F(p) \Rightarrow \int\limits_0^{\tau} f(\tau)d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$,

   найти изображения функций: $\int\limits_0^t e^{\tau} d\tau$, $\int\limits_0^t \tau sh3\tau d\tau$.

6. Пользуясь теоремой интегрирования изображения: $\dfrac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^{\infty} F(p)dp$, найти

   изображение функции: $\dfrac{\sin t}{t}$ и с помощью следствия: $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{f(t)}{t}dt = \int\limits_0^{\infty} F(p)dp$

   вычислить несобственный интеграл: $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sin t}{t}dt$.

7. С помощью теоремы смещения $e^{p_0 t} f(t) \div F(p - p_0)$ найти изображения функций: $e^{-t}cos2t$, $te^{-t}cos2t$.
8. С помощью теоремы запаздывания $f(t-\tau) \div e^{-p\tau}F(p)$ найти изображение периодического оригинала, заданного на первом периоде формулой: $f(t) = t,\ 0 \le t < 1$
9. Восстановить оригинал, раскладывая изображение на простейшие дроби: $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$, $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

Домашнее задание.

1. Пользуясь определением и свойством линейности, найти изображения функций: $t+1$, $e^{-t}+t$, $\cos 5t - 2\sin 5t$, t^2.
2. Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций: $cos\omega t$, $sh3t$
3. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих функций: $\sin^3 t$, $t\sin t$. (Сделайте проверку другим способом).
4. Пользуясь теоремой дифференцирования изображения, найти изображения функций:

   $t^2\cos t$, $t(e^t + cht)$
5. Пользуясь теоремой интегрирования оригинала, найти изображения для функций: $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$, $\int\limits_0^t \cos^2 \omega\tau d\tau$.
6. Пользуясь теоремой интегрирования изображения, найти изображения для: $\dfrac{\sin^2 t}{t}$, $\dfrac{1-e^t}{t}$
7. С помощью теоремы смещения найти изображение функции: $e^{-3t}t^2cost$.
8. С помощью теоремы запаздывания найти изображение периодического оригинала: $f(t) = |\sin t|,\ t > 0$
9. Восстановить оригинал, раскладывая изображение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p^2+4p+5)},\ \frac{p+2}{(p-2)(p+1)(p^2+4)}.$$

10. Т.Р.стр.27, контрольные вопросы №№3.1 – 3.6, 3.9 – 3.13

Занятие 13-14

Преобразование Лапласа, его применение (2).

Необходимые сведения.

1.Теорема о первой и второй производной оригинала :
если $f(t) \div F(p)$, то $f'(t) \div pF(P) - f(0)$, $f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$.

2. Использование формулы Дюамеля:
Решение задачи Коши $L_n[y(x)] = f(x)$, $y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$ можно найти по формуле: $y(x) = z'(x) * f(x)$, где $z(x)$ - решение вспомогательной задачи Коши: $L_n[z(x)] = 1$, $z(0) = z'(0) = ... = z^{(n-1)}(0) = 0$, а * означает свёртку:

$$z'(x) * f(x) = \int_0^x z'(\tau) \cdot f(x-\tau)d\tau .$$

3.Формула для нахождения изображения матричной экспоненты: $e^{At} \div -(A - pE)^{-1}$.

Задачи для решения в аудитории.

1. Операторным методом найти решение задачи Коши для ЛНДУ II с ПК:

1.1. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$ 1.2. $y'' + 2y' + 10y = xe^{-2x}, \; y(0) = 0, y'(0) = 1$

1.3. $y'' + 4y' + 13y = e^{-x}, \; y(0) = 1, y'(0) = 0$ 1.4. $y'' + 4y' + 5y = xe^{x}, \; y(0) = 0, y'(0) = 1$

2. Решить задачу Коши для ЛНДУ II с ПК с нулевыми Н.У., используя формулу Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши. Сделать проверку «классическим» методом.

2.1. $y'' + 2y' - 3y = x + 1$ 2.2. $y'' - y = xe^{x}$

2.3. $y'' + 3y' - 4y = \sin x$ 2.4. $y'' + y = \sin x$

3. Решить однородные системы операторным методом. Сделать проверку любым другим
способом:

3.1. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.3. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Домашнее задание.

1. Ефимов, Поспелов. Том 2.
Решить системы №№ 10.431, 10.434, 10.435 –с помощью характеристического уравнения
Решить задачу Коши для систем операторным методом №№ 10.432, 10.433, 10.436
2. Ефимов, Поспелов. Том 2.
Решить двумя способами – «классическим» и операторным №№ 10.370, 10.371,10.373

Занятие 15

1. **Элементы теории устойчивости.**

Устойчивость по Ляпунову.

1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

а) $\dot{x} = - x + t^2$, $x(1) = 1$; **б)** $\dot{x} = 2t(x + 1)$, $x(0) = 0$;

в) $\dot{x} = - x - 9y$, $x(0) = y(0) = 0$.

$\dot{y} = x - y$,

Устойчивость по первому приближению.

2. Найти все положения равновесия данных систем и исследовать их на устойчивость; дать качественную картину поведения интегральных кривых на фазовой плоскости:

а) $\dot{x} = y - x^2 - x$, **б)** $\dot{x} = e^x - e^y$,

$\dot{y} = 3x - x^2 - y$; $\dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2$.

Занятие 16
Уравнения математической физики

Уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad a = const$$

$U(x,t)$ - отклонение струны. a - зависит от упругости, и т.д.
Существуют два метода решения:

1. Метод бегущих волн;
2. Метод стоячих волн.

Метод стоячих волн (Фурье; разделение переменных)

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ Условие: $\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases}$

Попробуем искать решение в виде $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

$X(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, т.е. $\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = const = \lambda$

$$\begin{cases} T'' - \lambda a^2 T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0 \end{cases}$$

1. $\lambda > 0 \quad \lambda = p^2 \quad T(t) = C_1 e^{-pat} + Ce^{pat}$ "нефизичное" решение - нарушается закон сохранения энергии.
2. $\lambda > 0 \quad \lambda = -p^2$

$\begin{cases} T(t) = C_1 \sin pat + C_2 \cos pat \\ X(x) = C_3 \sin px + C_4 \cos px \end{cases}$

Учитывая краевые условия:

$$\begin{cases} X = A \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \\ T = B \sin\left(\frac{\pi k t a}{l}\right) + C \cos\left(\frac{\pi k t a}{l}\right) \end{cases}$$

$U(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin\left(\frac{\pi k a}{l} t\right) + C_k \cos\left(\frac{\pi k t a}{l}\right)\right) \sin\frac{\pi k x}{l}$

$U(x,0) = \varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k x}{l}; \quad C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi k x}{l} dx$

$U'_t(x,0) = \psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} \sin\frac{\pi k x}{l}; \quad B_k = \frac{2}{\pi k a}\int\limits_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi k x}{l} dx$

Для струны со свободными концами: $X = \cos\frac{\pi k x}{l}$

Метод бегущих волн (Метод Даламбера, характеристик)

Уравнение решается в явном виде через замену переменной.

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\eta-\xi}{2a} \end{array}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(U'_\xi + U'_\eta\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(U'_\xi + U'_\eta\right)\right) =$$

$$= a\left(U''_{\eta\xi}(-a) + U''_{\eta\eta}a - U''_{\xi\xi}(-a) - U''_{\xi\eta}a\right) - a^2\left(U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} - 2U''_{\xi\eta}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(U'_\xi + U'_\eta\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(U'_\xi + U'_\eta\right)\right) = \\ &= a\left(U''_{\eta\xi}(-a) + U''_{\eta\eta}a - U''_{\xi\xi}(-a) - U''_{\xi\eta}a\right) - a^2\left(U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} - 2U''_{\xi\eta}\right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U'_\xi + U'_\eta; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} = U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + 2U''_{\xi\eta} \Rightarrow U''_{\xi\eta} = 0$$

$\left(U'_\xi\right)'_\eta = 0 \Rightarrow U'_\xi$ не зависит от $\eta \Rightarrow U'_\xi = \Theta(\xi)$ т.е.

$$U = \Theta_1(\xi) + \Theta_2(\eta) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at)$$

Θ_1 описывает волну, бегущую вправо

$x - at = 0 \Rightarrow x = at$, т.е. "горб" движется вправо со скоростью a

Необходимо задание начальных условий:

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) & \text{- форма струны в начальный момент} \\ U'_t(x,0) = \psi(x) & \text{- профиль скорости} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \varphi(x) \\ -a\Theta'_1(x) + a\Theta'_2(x) = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \varphi(x) \\ -a\Theta_1(x) + a\Theta_2(x) = \int\limits_0^x \psi(s)ds \end{cases}$$

Таким образом $U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds + \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds$, или

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

Положение стуны в точке (x_0, t_0) определяется значениями в точках A и B и скоростью на отрезке AB

$x + at = x_0 + at_0 \quad x - at = x_0 - at_0$ (эти прямые называются характеристиками)

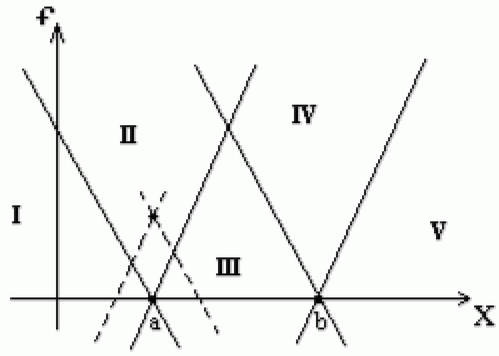

Рис. 3.1.

1) Пусть $\psi(x) = 0, \quad \varphi(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$ (проведем характеристики)

I,V - струна покоится

II - $U(x,t) = \frac{\varphi(x+at)}{2}$ - волна движется налево

IV - $U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)}{2}$ - волна движется направо

VI - $U(x,t) = 0$ - положение равновесия

III - две волны

2) $\varphi(x) = 0 \quad \psi(x) \neq 0$ на отрезке $[\tilde{a}, \tilde{b}]$

I,V - покой

II - $U(x,t) = \frac{x}{2a}\int\limits_{\tilde{a}}^{x+at}\psi(s)ds$ - волна движется налево (происходит изменение формы)

IV - аналогично II, направо

III - две волны

VI - $U(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\psi(s)ds$

Вопрос: Существуют ли начальные условия, при которых нет волны, бегущей в одну сторону.

Рис. 3.2.

Полубесконечная струна
1. Жесткое закрепление
:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = 0 \end{cases}$$

Если мы предполагаем наличие теоремы единственности для решения, то будем решать так:

Устроим нечетное продолжение φ на всю ось x ; тогда $\varphi(-at) + \varphi(at) = 0$ (вс"е хорошо); аналогично продолжим ψ : $\int\limits_{-at}^{at} \psi(s)ds = 0$

Реально наблюдается отражение с изменением фазы(см.~рис.~3.3).

2. Свободное закрепление
:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = 0 \\ U'_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

Для φ и ψ построим четное (по понятным причинам) продолжение.

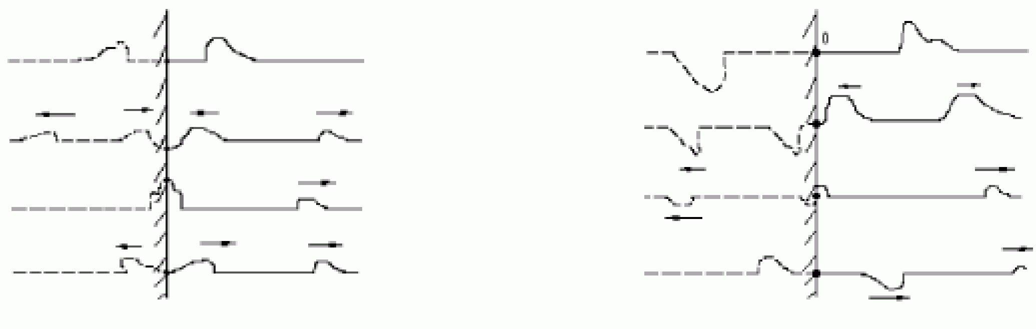

Рис. 3.3. Жесткое и свободное закрепление.

Конечная струна

:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases}$$

Здесь сначала строим нечетное продолжение относительно 0, а потом периодически с периодом 2l

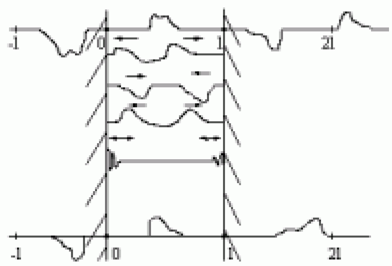

Рис. 3.4.

3.4. Вывод уравнения теплопроводности

Пусть на оси лежит однородный стержень, теплоизолированный от внешней среды (рис.9). Если в начальный момент времени с увеличением температура уменьшалась, то с течением времени будет происходить процесс теплопередачи в положительном направлении оси .

Будем описывать этот процесс функцией ( ), определяю- щей температуру в сечении стержня с координатой в момент времени .

Определим физический смысл её первых частных производных по координате и времени :

| — быстрота изменения температуры в данном сечении;

| — значение градиента температуры в данный момент времени.

Выберем в стержне произвольно два сечения с координатами и . Количество теплоты, проходящее через сечение стержня с ко- ординатой , определяется эмпирическим законом Фурье для теплопро- водности: ( ) ( )

где — коэффициент теплопроводности, — площадь сечения стерж- ня, — время.

Количество теплоты, проходящее через сечение стерж- ня с координатой : ( ) ( )

За одно и тоже время на участок стержня входит тепла , выходит . Их разность идѐт на повышение температуры участка стрежня: * ( ) ( ) +

Будем считать участок стержня столь малым, что в каждый момент времени температура в каждом его сечении одинакова. Тогда за время , температура в каждой точке участка увеличится на ( ) ( ).

Количество теплоты, необходимое для этого: [( ) ( )]

С учётом теоремы о среднем, получим:

По закону сохранения энергии: где — *коэффициент температуропроводности*.

Для унификации записи уравнений обозначим . Тогда, од-номерное уравнение теплопроводности примет вид:

3.5. Классификация задач математической физики.
Постановка задач математической физики,
условие корректности

Как отмечалось ранее, для однозначного решения дифференциального уравнения в частных производных необходимо присоединить к нему дополнительные условия — *начальные* и *граничные*. В зависимости от того, какие из условий могут быть заданы, задачи математической физики делятся на три типа: *задача Коши, смешанная задача и краевая задача*.

1. Задача Коши. Если процесс протекает в бесконечном интервале (бесконечная струна, бесконечный стержень), то краевые условия не задаются и задача сводится к *задаче только с начальными условиями — задаче Коши.*

2. Смешанная задача. Если рассматривается задача для конечного промежутка, то должны быть заданы и начальные и граничные условия. Это, так называемая, *смешанная задача*.

Рассмотрим на примере смешанной задачи о колебаниях закрепленной струны способы задания начальных и граничных условий.

Пусть струна длиной натянута и закреплена на концах. Начальная форма струны описывается функцией ( )*, начальная скорость точек струны задается функцией* ( ).

Граничные условия. Колебания струны описываются функцией ( ). Считая, что концы струны закреплены в точках и , граничные условия будут заданы следующим образом: ( ) , ( ) .

Начальные условия. Начальная форма струны будет задана как ( ) ( ), начальная скорость точек струны: ( ) ( ).

3. Краевая задача. К краевым сводятся задачи, описывающие ста-ционарные процессы. В этом случае время в уравнение не входит, со-ответственно начальные условия не задаются, и в задаче ставят только граничные (краевые) условия, то есть указывают поведение искомой функции на границе области. Если задается поведение самой искомой функции, то такую задачу называют *задачей Дирихле*, если задается значение первой производной искомой функции — *задачей Неймана*.

Определение начальных и граничных условий должно быть таким, чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в ее решении. В этом случае говорят, что **решение устойчиво относительно исходных данных.**

Задача математической физики считается поставленной **корректно**, если решение, удовлетворяющее всем её условиям, существует **единственно** и **устойчиво**.